
TD 12 — Espaces probabilisés finis

Du dénombrement aux probabilités — une transition en douceur

Exercice 1 — La joueuse du grenier

Une boîte de Scrabble contient douze jetons, un U, un I, trois E, deux L et cinq V. On tire successivement sans remise cinq jetons et on inscrit les lettres obtenues dans l'ordre du tirage pour obtenir un mot. Quelle est la probabilité pour que le mot écrit soit ELEVE ?

Exercice 2 — Paradoxe des anniversaires

On considère une classe de cinquante élèves. Pour chaque élève, on suppose que chaque jour de l'année a la même probabilité d'être le jour de son anniversaire et on ne prend pas en compte les années bissextiles.

1. Calculer la probabilité qu'au moins deux élèves de cette classe aient leur anniversaire le même jour.
2. Calculer la probabilité qu'au moins un·e élève ait la même date d'anniversaire que la vénérable prof de maths de cette classe.

Probabilités conditionnelles

Exercice 3 — Malades et vaccinées

Le tiers d'une population a été vacciné contre une maladie. Au cours d'une épidémie, on constate que sur quinze personnes malades, deux sont vaccinées.

1. Le vaccin est-il efficace ? Autrement dit, la probabilité d'être malade sachant que l'on a reçu le vaccin est-elle inférieure à celle d'être malade ?
2. On suppose désormais que sur cent personnes vaccinées, huit sont malades. Quelle est la proportion de personnes malades dans la population ?
3. Calculer la probabilité qu'une personne non vaccinée tombe malade.

Exercice 4 — Un pile, ou face

Soit $n \geq 2$. On lance n fois une pièce équilibrée. Les événements suivants :

- A : «On obtient au plus une fois *pile*.» ;
- B : «On obtient toujours le même résultat.»

sont-ils indépendants ?

Exercice 5 — Règles du jeu fixées mais...

On dispose d'un lot de cent dés, dont 25 sont pipés, avec lesquels la probabilité d'obtenir un six est de $\frac{1}{2}$, et 75 sont équilibrés. On prend un dé au hasard parmi les cent.

1. On lance le dé et on obtient un six. Quelle est la probabilité pour que ce dé soit pipé ?
2. On relance le dé et on obtient un second six. Quelle est la probabilité pour que le dé soit pipé ?

Exercice 6 — Mise en abîme

En TD, lorsque l'on soumet un exercice de maths à une classe de BCPST, neuf fois sur dix, c'est un-e élève qui le traite, et l'élève réussit une fois sur trois. Le reste du temps, c'est la prof qui fait l'exercice et elle le réussit 99 fois sur 100.

On soumet un exercice de maths à la classe et il est brillamment réussi. Quelle est la probabilité que la prof ait fait l'exercice ?

Exercice 7 — Y'a le téléphone qui son

Quand on téléphone chez Gaston, on a neuf chances sur dix qu'il ne décroche pas. Lorsqu'il est chez lui, Gaston décroche le téléphone deux fois sur trois.

1. On téléphone chez Gaston. Quelle est la probabilité que Gaston soit chez lui ?
2. On téléphone chez Gaston et il ne décroche pas. Quelle est la probabilité que Gaston soit chez lui ?

Exercice 8 — À bicyclette

Pour se rendre à l'école, madame Hokuchaï prend soit son vélo rouge, soit son vélo orange. Le premier jour, elle prend un vélo au hasard. Les jours suivants, elle prend le même vélo que la veille si celui-ci lui a permis d'arriver à l'heure, sinon, elle en change. La probabilité que madame Hokuchaï arrive à l'heure avec le vélo rouge est de $\frac{5}{6}$, et de $\frac{11}{12}$ avec le vélo orange.

Pour tout entier naturel k , on introduit R_k l'évènement «Le k -ième jour, madame Hokuchaï prend le vélo rouge.».

1. Pour tout entier naturel k , exprimer $\mathbb{P}(R_{k+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(R_k)$.
2. Calculer la probabilité que madame Hokuchaï arrive à l'heure aujourd'hui.

Exercice 9 — Du hasard, mais surtout de la stratégie

Au casino, Camille joue sur deux machines à sous, l'une sur laquelle on gagne une fois sur dix et l'autre une fois sur cinq.

Camille, qui ne connaît pas les réglages des différentes machines, ne sait pas quelle machine est la plus favorable. Iel adopte alors la stratégie suivante : pour sa première partie, iel choisit une machine au hasard. Ensuite, pour chaque nouvelle partie, iel change de machine s'iel a perdu la partie précédente et garde la même machine s'iel a gagné.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité que Camille gagne la n -ième partie.